

Esercizi svolti - Integrazione di funzioni razionali - AD

1. Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{2x+5}{(x^2+1)(x-3)} dx$$

determinano le due costanti A e B tali che:

$$\frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-3} = \frac{(A+C)x^2 + (-3A+B)x + C - 3B}{(x^2+1)(x-3)}$$

Si osservi che quando un fattore del denominatore è di grado superiore al primo bisogna scrivere un polinomio di grado inferiore: $\frac{Ax+B}{x^2+1}$

Applichiamo il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -3A+B=2 \\ C-3B=5 \end{cases}; \begin{cases} A=-C \\ B=2-3C \\ C-6+9C=5 \end{cases}; \begin{cases} A=-\frac{11}{10} \\ B=-\frac{13}{10} \\ C=\frac{11}{10} \end{cases}$$

e l'integrale diventa:

$$\int -\frac{11}{10} \frac{x}{x^2+1} dx - \frac{13}{10} \int \frac{1}{x-3} dx + \int \frac{\frac{11}{10}}{x-3} dx =$$

Con banali calcoli si ha:

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{10} \int \frac{11x-13}{x^2+1} dx + \frac{11}{10} \int \frac{1}{x-3} dx = -\frac{1}{10} \left[11 \int \frac{x}{x^2+1} dx - 13 \int \frac{1}{x^2+1} dx \right] + \frac{11}{10} \ln|x-3| + c = \\ &= -\frac{1}{10} \left[\frac{11}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx - 13 \int \frac{1}{x^2+1} dx \right] + \frac{11}{10} \ln|x-3| + c = \\ &= -\frac{11}{20} \ln|x^2+1| - 13 \arctan gx + \frac{11}{10} \ln|x-3| + c = \end{aligned}$$



2. Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{1}{(x^3+x)} dx$$

Scomponiamo il denominatore:

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)} dx$$

$$\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{(A+B)x^2 + Cx + A}{(x^2+1)(x-3)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases}; \begin{cases} A=-B \\ C=0 \\ A=1 \end{cases}; \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=0 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{x} dx + \int \frac{-x}{x^2+1} dx = \ln|x| + \frac{1}{2} \int \frac{-2x}{x^2+1} dx = \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + c$$

3. Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{1}{3x^2 - 2x + 4} dx$$

Si verifica che il

$$\Delta = 4 - 48 < 0$$

Mettiamo in evidenza il 3 al denominatore:

$$\int \frac{1}{3\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}\right)} dx$$

Aggiungendo e sottraendo al denominatore il coefficiente della x diviso per 2 ed elevato al quadrato, in modo da avere un quadrato di binomio, si ha:



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} + \frac{4}{3}\right)} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) + \left(-\frac{1}{9} + \frac{4}{3}\right)} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{11}{9}\right)} dx = \\
 &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{3x-1}{3}\right)^2 + \left(\frac{11}{9}\right)} dx = \frac{1}{3} \int \frac{1}{\frac{(3x-1)^2}{9} + \left(\frac{11}{9}\right)} dx = \frac{1}{3} \int \frac{9}{(3x-1)^2 + 11} dx =
 \end{aligned}$$

Dividendo al numeratore e al denominatore si ha:

$$= \frac{1}{3} \int \frac{\frac{9}{11}}{\frac{(3x-1)^2}{11} + 1} dx = \frac{1}{3} \int \frac{\frac{9}{11}}{1 + \left(\frac{3x-1}{\sqrt{11}}\right)^2} dx = \frac{1}{3} \int \frac{\frac{3}{\sqrt{11}} \frac{3}{\sqrt{11}}}{1 + \left(\frac{3x-1}{\sqrt{11}}\right)^2} dx = \frac{1}{\sqrt{11}} \operatorname{arctg} \left(\frac{3x-1}{\sqrt{11}} \right) + c$$

4. Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{1}{x^2 + 3x + 1} dx$$

Calcoliamo il

$$\Delta = 9 - 4 = 5 > 0$$

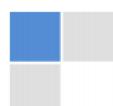
Scomponiamo il denominatore, l'integrale diventa:

$$\int \frac{1}{\left(x - \left(\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}\right)\right) \left(x - \left(\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right)\right)} dx$$

Svolgiamo i calcoli:

$$\int \frac{1}{\left(\frac{2x+3+\sqrt{5}}{2}\right) \left(\frac{2x-3-\sqrt{5}}{2}\right)} dx = 4 \int \frac{dx}{(2x+3+\sqrt{5})(2x+3-\sqrt{5})}$$

Decomponiamo in somma:



$$\frac{A}{(2x+3+\sqrt{5})} + \frac{B}{(2x+3-\sqrt{5})} = \frac{(2A+2B)x + (3-\sqrt{5})A + B(3+\sqrt{5})}{(2x+3+\sqrt{5})(2x+3-\sqrt{5})}$$

Applichiamo il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} 2A+2B=0 \\ (3-\sqrt{5})A+(3+\sqrt{5})B=1 \end{cases}; \begin{cases} A=-B \\ -(3-\sqrt{5})B+(3+\sqrt{5})B=1 \end{cases}; \begin{cases} A=-B \\ (-3+\sqrt{5}+3+\sqrt{5})B=1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} B=\frac{1}{2\sqrt{5}} \\ A=-\frac{1}{2\sqrt{5}} \end{cases}$$

Quindi:

$$\int \frac{1}{\left(x - \left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)\right)\left(x - \left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)\right)} dx = 4 \left[\int \frac{-\frac{1}{2\sqrt{5}}}{(2x+3+\sqrt{5})} dx + \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{5}}}{(2x+3-\sqrt{5})} dx \right] =$$

$$= 4 \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[\int \frac{-1}{(2x+3+\sqrt{5})} dx + \int \frac{1}{(2x+3-\sqrt{5})} dx \right] = 2 \frac{1}{2\sqrt{5}} \left[- \int \frac{2}{(2x+3+\sqrt{5})} dx + \int \frac{2}{(2x+3-\sqrt{5})} dx \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{2x+3-\sqrt{5}}{2x+3+\sqrt{5}} \right| + c$$

5. Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{1}{(1+x^3)} dx$$

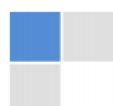
Scomponiamo il denominatore:

$$\int \frac{1}{(1+x^3)} dx = \int \frac{1}{(1+x)(x^2-x+1)} dx$$

Decomponiamo in somma:

$$\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} + \frac{(A+B)x^2 + (-A+B+C)x + A+C}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

Applichiamo il principio di identità dei polinomi:



$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A+B+C=0; \\ A+C=1 \end{cases} ; \begin{cases} A=-B \\ C=1-A \\ -A-A-A=-1 \end{cases} ; \begin{cases} A=\frac{1}{3} \\ B=-\frac{1}{3} \\ C=\frac{2}{3} \end{cases}$$

L'integrale diventa:

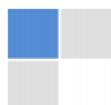
$$\begin{aligned} & \int \frac{\frac{1}{3}}{x+1} dx + \int \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}{x^2 - x + 1} dx = \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{3} \int \frac{x-2}{x^2 - x + 1} dx = \\ & = \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{3} \int \frac{x}{x^2 - x + 1} dx + \frac{2}{3} \int \frac{1}{x^2 - x + 1} dx = \\ & = \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{3} \frac{1}{2} \int \frac{2x-1+1}{x^2 - x + 1} dx + \frac{2}{3} \int \frac{1}{x^2 - x + 1} dx = \\ & = \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \left[\int \frac{2x-1}{x^2 - x + 1} dx + \int \frac{1}{x^2 - x + 1} dx \right] + \frac{2}{3} \int \frac{1}{x^2 - x + 1} dx = \\ & = \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln|x^2 - x + 1| + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 - x + 1} dx = \end{aligned}$$

Calcoliamo a parte $\int \frac{1}{x^2 - x + 1} dx$

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{x^2 - x + 1} dx = \int \frac{1}{x^2 - x + \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{4}} dx = \int \frac{1}{\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \left(1 - \frac{1}{4}\right)} dx = \\ & = \int \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)} dx = \int \frac{1}{\left(\frac{2x-1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx = \int \frac{1}{\frac{(2x-1)^2}{4} + \frac{3}{4}} dx = \\ & = \int \frac{4}{(2x-1)^2 + 3} dx = \int \frac{\frac{4}{3}}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} dx = \\ & = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + c \end{aligned}$$

Pertanto gli integrale dato è:

$$\frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln|x^2 - x + 1| + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + c$$



6. Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{x}{x^4 - 3x^2 + 2} dx$$

Scomponiamo il denominatore:

$$\int \frac{x}{x^4 - 3x^2 + 2} dx = \int \frac{1}{(x^2 - 1)(x^2 - 2)} dx = \int \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2 - 2)} dx$$

Decomponiamo in somma:

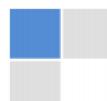
$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-2} = \frac{(A+B+C)x^3 + (A-B+D)x^2 + (-2A-2B-C)x + (-2A+2B-D)}{(x-1)(x+1)(x^2-2)}$$

Applichiamo il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A-B+D=0 \\ -2A-2B-C=1 \\ -2A+2B-D=0 \end{cases}; \begin{cases} A=-\frac{1}{2} \\ B=-\frac{1}{2} \\ C=1 \\ D=0 \end{cases}$$

L'integrale dato diventa:

$$\begin{aligned} & \int \frac{-1/2}{x-1} dx + \int \frac{-1/2}{x+1} dx + \int \frac{x}{x^2-2} dx = -\frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2-2} dx = \\ & = -\frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln|x^2-2| + c = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2-2}{x^2-1} \right| + c = \ln \sqrt{\frac{x^2-2}{x^2-1}} + c \end{aligned}$$



7. Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{x^4 + 3x^3 - x + 1}{x^3 + 2x^2 + x} dx$$

Eseguendo la divisione tra polinomi si ha:

$$\frac{x^4 + 3x^3 - x + 1}{x^3 + 2x^2 + x} = x + 1 + \frac{(-3x^2 - 2x + 1)}{x^3 + 2x^2 + x}$$

Pertanto:

$$\int \frac{x^4 + 3x^3 - x + 1}{x^3 + 2x^2 + x} dx = \int x + 1 dx + \int \frac{(-3x^2 - 2x + 1)}{x^3 + 2x^2 + x} dx = \frac{x^2}{2} + x - \int \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^3 + 2x^2 + x} dx$$

$$\text{Calcoliamo a parte } \int \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^3 + 2x^2 + x} dx = \int \frac{3x^2 + 2x - 1}{x(x+1)^2} dx$$

Applicando la decomposizione in somma:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} = \frac{(A+B)x^2 + (2A+B+C)x + A}{x(x+1)(x+1)^2}$$

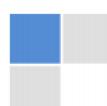
Applichiamo il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} A + B = 3 \\ 2A + B + C = 2; \\ A = -1 \end{cases} \begin{cases} A = -1 \\ B = 4 \\ C = 0 \end{cases}$$

L'integrale diventa:

$$\int \frac{-1}{x} dx + \int \frac{4}{x+1} dx = -\log|x| + 4 \log|x+1| + c$$

Tornando all'integrale dato si ha:



$$\int \frac{x^4 + 3x^3 - x + 1}{x^3 + 2x^2 + x} dx = \frac{x^2}{2} + x + \log|x| - 4\log|x+1| + c$$

